

波导本征问题分析的径向基函数方法

张淮清, 俞集辉

(重庆大学输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室, 重庆 400044)

摘要: 针对网格方法分析波导本征问题时常面临剖分和近似精度低的问题, 论文将基于配点原理的径向基函数无网格方法引入进来, 给出径向基函数求解本征值问题的方法、实施步骤和相应的离散方程形式. 以矩形、圆形和L形波导的本征分析为例, 通过与有限元法比较, 反映该方法具有计算量小和精度高的优势, 另外, 它实施方便并易于推广到高维问题中.

关键词: 径向基函数; 无网格法; 波导; 本征模型

中图分类号: TN814 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 12-2433-06

Radial Basis Function Method for the Eigen Analysis of Waveguide

ZHANG Huaqing, YU Jihui

(State Key Laboratory of Transmission Equipment and System Safety and Electrical New Technology, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Traditional mesh based methods in eigen analysis of waveguide meet two big challengers. One comes from the mesh generation, which is a big difficulty especially in complex geometry. The other originates from the local linear approximation, whose approximation accuracy is poor. So radial basis function method was introduced in this paper, which is a kind of meshless methods with collocation type. Ideas on how to solve eigenvalue problems and detailed implementation procedure were presented with corresponding discrete equations. Comparing to finite element method in the analyzing rectangular, round and L shaped waveguide, the method suggested in this paper can be realized with low computation and high precision. In addition, the radial basis function method can be implemented more convenient and also can be extended into high dimension problems easily.

Key words: radial basis function; meshless method; waveguide; eigen modal

1 引言

在电磁工程和微波技术领域广泛应用各类截面波导以达到预定目标, 其中传播常数和传输模式分析是重要的研究内容. 通常, 对矩形、圆形、椭圆形波导, 可通过分离变量法、模态分析法^[1]以及多极理论等给出解析或半解析解; 而对复杂截面波导, 像脊形、L形、三角形等, 则主要借助于数值近似方法, 如: 有限元法^[2]、有限差分法、边界积分方程法^[3]等, 它们在求解中需要网格剖分和局部线性近似, 因而也称为网格法. 网格法在处理复杂结构或不连续边界时, 其剖分难度较大, 甚至需要多次剖分; 另外, 线性近似精度较低, 尤其在高频模时计算精度较差, 为提高精度必然增加网格数并导致计算量的剧增.

目前, 无网格法已引起巨大关注并在计算力学领域取得了极大的成功. 在电磁场的数值计算中, 无单元 Galerkin 法^[4,5] (Element Free Galerkin, EFG) 和径向基函数法^[6,7] (Radial Basis Function, RBF) 已成功应用于静态场

和涡流场的计算, 它们在求解中部分或彻底摆脱了网格限制, 较好解决了网格法中结构剖分和近似精度低的问题. 现已有学者将 EFG^[8] 应用于波导本征问题的计算, 本文则尝试用 RBF 方法分析波导本征问题. RBF 始于曲面和散布数据的插值, 后来 Kansa^[9] 将其应用于微分方程领域, 现已发展成为求解数学物理方程的重要方法, 它是一类以 RBF 作为插值函数的配点型无网格法.

论文首先阐述了函数近似的 RBF 配点原理, 给出了 RBF 求解本征值问题的方法, 建立了相应的离散方程. 随后, 具体以矩形、圆形和 L 形波导的本征问题分析为例, 将 RBF 和有限元方法进行对比, 反映了该方法的计算特点和性能优势.

2 RBF 求解波导本征问题的原理

2.1 波导的本征模型

现以轴线沿 z 方向的均匀金属波导为例, 由电磁场理论知: 波导内电磁场量所满足的控制方程和边界条件如下:

$$\text{控制方程: } Lu + k_i^2 u = 0 \quad (1)$$

$$\text{边界条件: } L_B u = 0 \quad (2)$$

其中: u 为电磁场量, k_i 是截止波数, $L = \nabla_t^2$ 是横向拉氏算子, 在直角坐标系下 $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 极坐标下

$L = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, L_B 为边界算子. 当传输 TM 波时, $u = E_z$, L_B 指第一类边界: $E_z|_{\partial\Omega} = 0$; TE 波时, $u = H_z$, L_B 指第二类边界: $\frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$.

2.2 函数的 RBF 近似原理

径向基函数定义为距离的函数, 即: $\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|)$, 式中 $\|\cdot\|$ 为 n 维空间的欧氏范数, 因而它对空间维数不敏感. 常见函数如: 高斯函数、多二次函数 (Multiquadric, 简称 MQ) 和薄板样条函数, 其中 MQ 函数由于逼近精度高和收敛快而得以广泛选用^[10]. 下面以平面 Ω 上定义的连续可微函数 $u(\mathbf{x})$ 的逼近为例阐述 RBF 配点原理.

设 $u(\mathbf{x})$ 可由 RBF 的线性组合近似表示, 即:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(\mathbf{x}) = [\Phi^T(\mathbf{x})] [\mathbf{a}] \quad (3)$$

式中 $\phi_i(\mathbf{x})$ 是第 i 个径向基函数. 式(3)的权系数 (\mathbf{a}) 由下面的配点方程确定:

$$\sum_{i=1}^N a_i \phi_i(\mathbf{x}_j) \quad (4)$$

式中 \mathbf{x}_j 表示配点位置, 对应矩阵为: $[\mathbf{B}][\mathbf{a}] = [\mathbf{u}]$, 其中 $B_{ij} = \phi_j(\mathbf{x}_i)$, 因而系数 $[\mathbf{a}] = [\mathbf{B}]^{-1}[\mathbf{u}]$, 代入式(3)得 $u(\mathbf{x})$ 近似形式:

$$u^h(\mathbf{x}) = [\Phi^T(\mathbf{x})] [\mathbf{B}]^{-1} [\mathbf{u}] \quad (5)$$

当径向基函数取 MQ 时, 在直角坐标系下, $\mathbf{x} = (x, y)$,

$\phi_i(\mathbf{x}) = \sqrt{(x - c_{ix})^2 + (y - c_{iy})^2 + \alpha_i^2}$, 式中 (c_{ix}, c_{iy}) 为基函数中心, α_i 为形状参数; 在极坐标下, $\mathbf{x} = (\rho, \theta)$,

$\phi_i(\mathbf{x}) = \sqrt{\rho^2 + \rho_{ic}^2 + 2\rho\rho_{ic}\cos(\theta - \theta_{ic}) + \alpha_i^2}$, (ρ_{ic}, θ_{ic}) 为基函数中心.

2.3 RBF 求解本征值的方法

RBF 求解本征问题的基本思想就是: 将本征模型中的待求函数 u 用 RBF 近似表示, 通过配点原理转化为关联 RBF 的代数方程和相应矩阵形式, 同时原模型中的截止波数和传输模式就对应为矩阵的特征值和特征向量. 下面详细给出该方法的实施方案和步骤:

(1) 布点和配点设置: 布点是指设置基函数中心并确定形状参数的过程; 配点指设定配置法中用于确定系数的点的位置. 为反映控制方程和边界方程的作用, 需同时在域内和边界上配点, 此处不妨将布点和配点重合且点数为 N (其中域内设置 N_I 点, 边界上设置 N_B 点).

(2) RBF 分析本征问题的过程^[11]包括如下三步:

①根据 RBF 配点原理, 将函数 u 由 RBF 近似表示, 由配点条件(式 4)和边界条件(式 2)可得方程:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(\mathbf{x}_j) = u^l(\mathbf{x}_j), & (j = 1, 2, \dots, N_I) \\ \sum_{i=1}^N a_i L_B \phi_i(\mathbf{x}_j) = 0, & (j = N_I + 1, \dots, N_I + N_B) \end{cases} \quad (6)$$

令: $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \phi_i(\mathbf{x}_j)_{N_I \times N} \\ \mathbf{L}_B \phi_i(\mathbf{x}_{N_I+j})_{N_B \times N} \end{bmatrix}$, 式(6)可表示为: $[\mathbf{A}][\mathbf{a}] = [\mathbf{u}]$, 因此, 系数:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}] = [\mathbf{A}]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

②由本征模型的控制方程可得:

$$\sum_{i=1}^N a_i L \phi_i(\mathbf{x}_j) = -k_i^2 u^l(\mathbf{x}_j) \quad (8)$$

其中 $(j = 1, \dots, N_I)$, 有 $L^l \mathbf{a} = -k_i^2 \mathbf{u}^l$, $L^l = [L \phi_i(\mathbf{x}_j)]_{N_I \times N}$, 表示作用在基函数 $\phi_i(\mathbf{x})$ 的拉氏算子, 具体形式见附录. 结合式(7), 有:

$$L^l \mathbf{a} = L^l [\mathbf{A}]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = -k_i^2 \mathbf{u}^l \quad (9)$$

令: $L_\Phi = L^l [\mathbf{A}]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_I \times N_I} \\ \mathbf{0}_{N_B \times N_I} \end{bmatrix}$, 则有:

$$L_\Phi \mathbf{u}^l = -k_i^2 \mathbf{u}^l \quad (10)$$

③经上述推导, 形成与 k_i^2 对应的代数方程(10), 显然是矩阵 $[-L_\Phi]_{N_I \times N_I}$ 的特征值, 而且特征值个数为 N_I ; 另外, 与矩阵 $[-L_\Phi]_{N_I \times N_I}$ 对应的特征向量对应为域内的待求函数 u^l .

(3) 通过数值方法求得矩阵 $[-L_\Phi]_{N_I \times N_I}$ 的特征值和特征向量后, 本征模型中截止波数可直接对特征值开方求得; 而传输模式 u 的域内数值即为对应特征向量, 边界上取值则由边界条件确定, 对 TM 波, 其边界上有 $E_z = 0$, 而对 TE 波, 要求边界上 H_z 同域内保持连续.

3 数值算例

本节应用 RBF 方法求解本征值问题, 为考察该方法的效果, 主要选用矩形、圆形和 L 形金属波导, 前二者解析解可通过分离变量法给出. 重点将 RBF 法和有限元法 (Finite Element Method, FEM) 进行比较, FEM 具体是通过 Matlab 的 PDE Toolbox 实现.

3.1 矩形波导

考虑边长 $a = 2\text{cm}$ 和 $b = 1\text{cm}$ 的矩形金属波导, 截面上取直角坐标系, 计算截止波数和传输模式. 当传输 TM 波时, 本征模型如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0, (x, y) \in \Omega \\ E_z = 0, (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

其截止波数为: $k_i = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$, m, n 是非零的正整数; $E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$. 而当传输 TE 波时, 本征模型为:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k^2 H_z = 0, (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0, (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

k_i 计算同上, 但 m, n 是不同时为零的正整数, $H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$. 下面分别用 RBF 法和 FEM 进行求解.

仿真 1: 考察当配点数(RBF)或网格数(FEM)较少时的计算精度. 取配点和网格结构如图 1, RBF 的域内和边界节点数分别为 11 和 12, 形状参数取 $\alpha = 1.0$ (TM)/2.5(TE); FEM 中的节点数为 23, 单元数为 32. 两种方法计算的截止波数 k_i 如表 1.

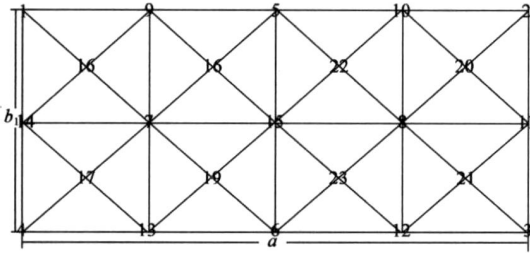


图 1 RBF 节点和 FEM 网格图示

表 1 截止波数对照表(RBF 和 FEM)

模式	准确值	RBF 解	FEM 解	RBF 误差	FEM 误差
TM11	3.5124	3.5054	3.7440	0.2002%	6.5934%
TM21	4.4429	4.4501	4.8405	0.1618%	8.9504%
TM31	5.6636	5.6029	6.5122	1.0713%	14.9845%
TM12	6.4766	6.0349	9.7980	6.8187%	51.2834%
TE10	1.5708	1.5757	1.5977	0.3114%	1.7136%
TE01	3.1416	3.1277	3.3545	0.4429%	6.7782%
TE11	3.5124	3.3537	3.7440	4.5190%	6.5934%

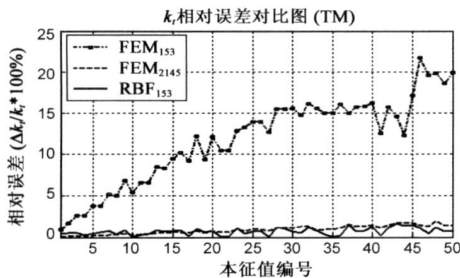


图 2 矩形波导 TM 波截止波数 RBF 解和 FEM 解误差对比

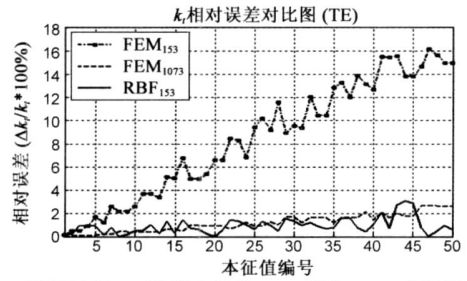


图 3 矩形波导 TE 波截止波数 RBF 解和 FEM 解误差对比

仿真 2: 取节点间距 $h = 0.125$ 且均匀分布在截面区域 $[0, 2] \times [0, 1]$ 上. 在 RBF 中, 域内和边界节点数各为 105 和 48, 形状参数取 $\alpha = 0.25$ (TM)/0.625(TE); 而在 FEM 中, 与 $h = 0.125$ 对应的节点数为 153, 单元数为 256. 在以上参数下, 两种方法计算的截止波数 k_i 的误差分布如图 2~3; 另外, 通过对特征向量和的边界处理

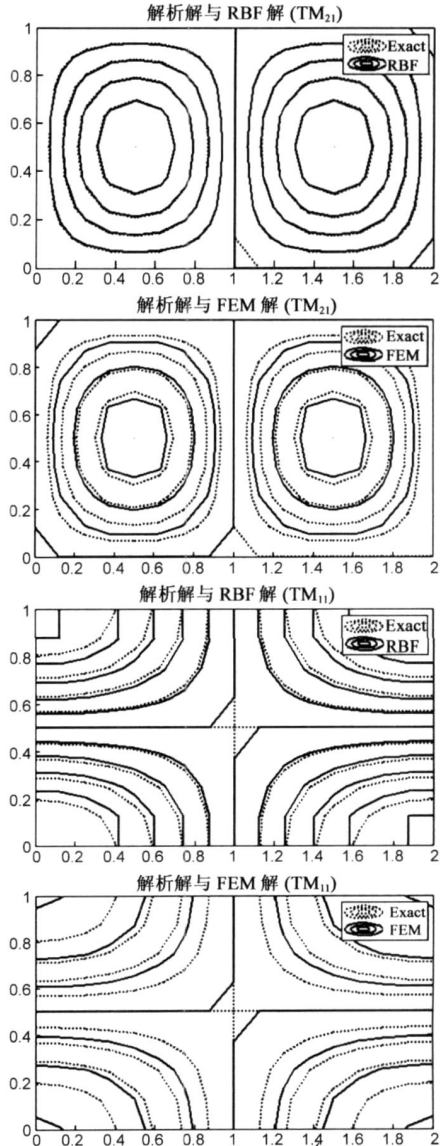


图 4 矩形波导传输模式解析解、RBF 解和 FEM 解对比图

给出了TM₂₁和TE₁₁的场型如图 4.

以上结果说明: 在相同节点数下, RBF 较 FEM 有更高的精度. 现不断对 $h = 0.125$ 下的有限元网格加密, 计算求得的 k_i 误差逐渐变小, 在 TM 波中, 当节点数加密至 2145 时(对应单元数为 4096), FEM 达到与 RBF 相当的精度; 而在 TE 波中, 为达同样精度, 其 FEM 节点数需 1073 (对应单元数为 2048), 具体误差对比情况如图 2~ 3.

性能评价: 仿真 1 说明在较少的节点数下, RBF 法也能较好求得低次模的参数, 表 1 数据反映在 TM 波中, RBF 较 FEM 的精度约高 10 倍; 在 TE 波中, 精度亦具有明显优势. 仿真 2 从整体反映 RBF 法的计算优势, RBF 在 153 个节点时, 对 TM 和 TE 波的最大误差分别为 1.5873% 和 3.0844%; 而此时 FEM 误差为 21.7744% 和 16.1704%; 直至加密至 2145(TM) 和 1073(TE) 节点后, FEM 误差才改进到 1.9311% 和 2.6756%, 达到与 RBF 相当的精度.

3.2 圆形波导

考虑半径 $r_0 = 1\text{cm}$ 的圆形金属波导, 截面上取极坐标系. 当传输 TM 波时, 本征模型为:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k_t^2 E_z = 0, & \rho < r_0 \\ E_z = 0, & \rho = r_0 \end{cases} \quad (13)$$

其截止波数为: $k_t = \frac{x_n^{(m)}}{r_0}$, $x_n^{(m)}$ 为第 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第 n 个零点位置, ($m = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots$); $E_z = E_0 J_m(kr_0) \begin{pmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{pmatrix}$. 而当传输 TE 波时, 本征模型为:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + k_t^2 H_z = 0, & \rho < r_0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} = \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0, & \rho = r_0 \end{cases} \quad (14)$$

其截止波数为: $k_t = \frac{x_n^{(m)}}{r_0}$, $x_n^{(m)}$ 为第 m 阶贝塞尔函数导数 $J'_m(x)$ 的第 n 个零点位置, m, n 取值同上, $H_z = H_0 J_m(kr_0) \begin{pmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{pmatrix}$.

参数设置: 在截面上设置如图 5 的节点, 在 RBF 中, 对应域内和边界节点数分别为 225 和 64, 取形状参数 $\alpha = 0.25$ (TM)/0.625 (TE); 对应 FEM 的节点数为

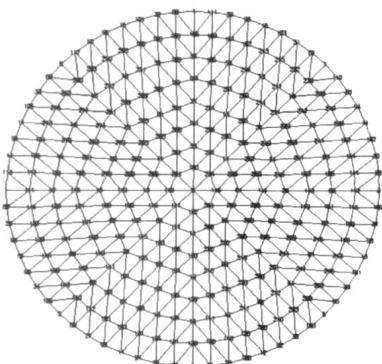


图 5 圆形波导截面节点分布图

289, 单元数为 512.

在以上参数下, 用 RBF 和 FEM 计算截止波数, 考虑到圆形波导中存在简并, 所以对参数进行了去简并处理, 随后给出前 40 个截止波数的误差分布如图 6. 显然, RBF 法较 FEM 有更高的精度, 在 TM 波时二者最大误差分别为 0.6846% 和 7.0798%; 而在 TE 波时则分别为 1.8684% 和 5.0563%.

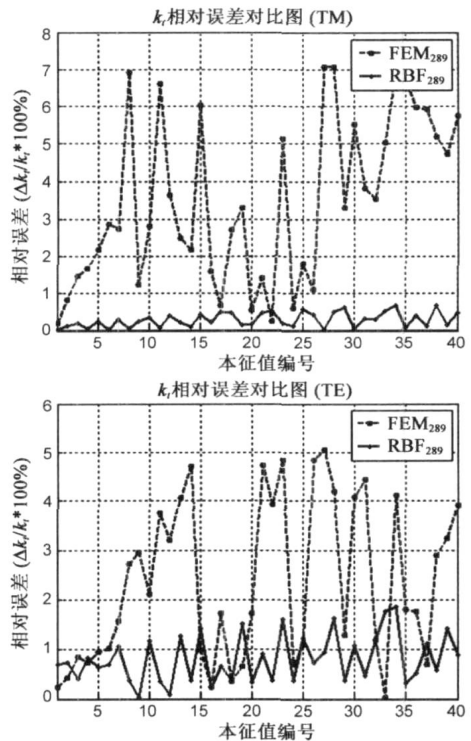


图 6 圆形波导截止波数 RBF 解和 FEM 解的误差比较

接着通过对现有网格进行疏密化处理, 分别得到节点数为 81、1089 和 4225 以及单元数为 128、2048 和 8192 的 FEM 网格, 经求解, 给出的 TM 和 TE 波的计算结果如图 7~ 8.

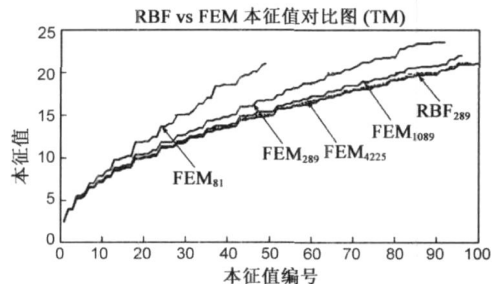


图 7 圆形波导截止波数 RBF 解和 FEM 解的比较 (TM)

从以上比较可看出: RBF 在 289 节点分布下计算的精度就达到 FEM 在 4225 节点下的计算效果. 另外, FEM 在波导分析中存在伪解现象, 从而增加去简并的难度, 而在 RBF 求解中则未出现.

3.3 L 形波导

考虑 L 形波导, 截面结构如图 9, 对其分别用 RBF

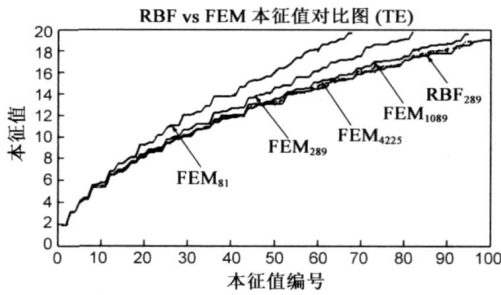


图 8 圆形波导截止波数 RBF 解和 FEM 解的比较 (TE) 和有限元方法求解, 并取有限元方法中节点数为 8353, 单元数为 16384 的解为参考解, 考察 RBF 方法的计算效果。

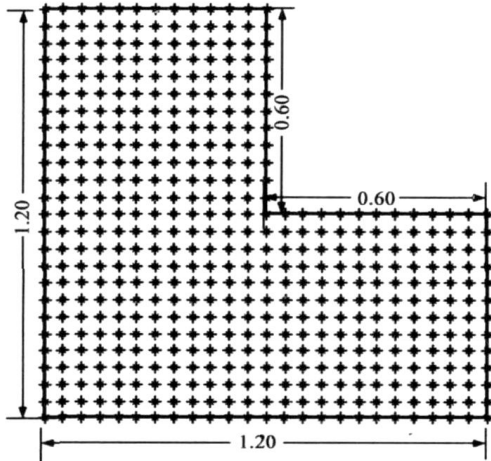


图 9 L 波导结构及 RBF 节点分布图

参数设置: 截面上 RBF 的域内和边界节点数为 385 和 96, 取形状参数 $\alpha = 0.10\text{GM/TE}$; 取 FEM 在四种不同网格数下解进行比较, 其节点数分别为 149、553、2129 和 8353, 对应单元数为 256、1024、4096 和 16384。

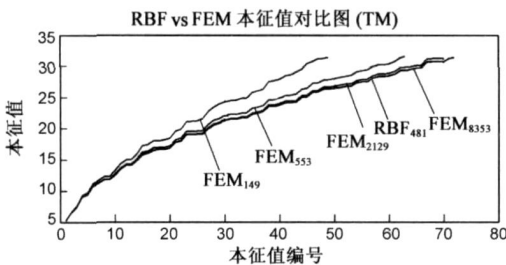


图 10 L 形波导截止波数 RBF 解和 FEM 解的比较 (TM)

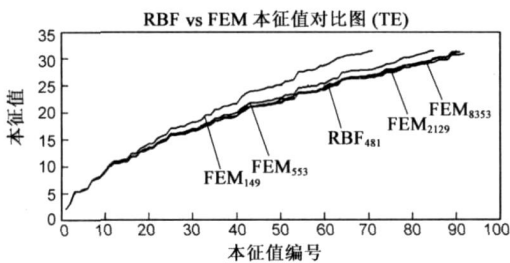


图 11 L 形波导截止波数 RBF 解和 FEM 解的比较 (TE) 在以上参数下, RBF 和 FEM 解如图 10~ 11, 可见,

RBF 在 481 节点数时, 达到 FEM 在 8353 节点下的计算效果, 而且通过前 70 个本征值的对比分析, RBF 最大相对误差为 1.0369% (TM) 和 3.9222% (TE)。

3.4 小结

通过矩形、圆形和 L 形波导本征分析可见: (1) 在某特定配点或剖分网格下, RBF 和 FEM 的计算精度随传输模次的增加而误差渐大。其中 FEM 精度变化非常明显, 而 RBF 则在较大范围内保持较高的精度, 这反映该方法在高次模分析中具有优势。另外, 在低次模分析中, RBF 仅需较少的节点数即能获得较高精度, 而 FEM 的误差则较大; (2) 在同一波导和节点分布下, RBF 分析 TM 波时的精度较 TE 波高, 这主要源于配点方法对导数边界处理的缺陷; (3) 在传输模式分析中, 由于 RBF 法求得特征值和特征向量更接近理论解, 因而给出的场型图更准确。

4 结论

论文将配点型径向基函数无网格方法应用到波导的本征问题分析中: (1) 给出无网格法求解本征值问题的方法, 包括 RBF 法的近似原理、实施步骤和相应的离散方程形式; (2) 数值实例表明: RBF 法在矩形和圆形波导本征问题分析中是可行的和有效的, 而且它能够在较少的节点数下获得较高的计算精度; (3) 同 FEM 相比, RBF 精度优势明显且无伪解现象, 常达到数倍节点下的 FEM 计算性能。另外, FEM 在高次模时, 计算精度明显变差, 而 RBF 仍能保持较高的精度; (4) RBF 法是配点方法, 因而实施过程简单, 无需复杂的网格剖分, 而径向基函数对空间维数不敏感, 故可方便应用于三维 (如谐振腔) 问题的分析。

附录

径向基函数及其导数在不同坐标下的形式。

直角坐标系:

$$\begin{aligned} \phi_i(x, y) &= \sqrt{(x - c_{ix})^2 + (y - c_{iy})^2 + \alpha_i^2} \\ \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} &= \frac{x - c_{ix}}{\sqrt{(x - c_{ix})^2 + (y - c_{iy})^2 + \alpha_i^2}} \\ \frac{\partial^2 \phi_i(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{(y - c_{iy})^2 + \alpha_i^2}{[(x - c_{ix})^2 + (y - c_{iy})^2 + \alpha_i^2]^{1.5}} \\ L\phi_i(x, y) &= \frac{(x - c_{ix})^2 + (y - c_{iy})^2 + 2\alpha_i^2}{[(x - c_{ix})^2 + (y - c_{iy})^2 + \alpha_i^2]^{1.5}} \end{aligned}$$

极坐标系:

$$\begin{aligned} \phi_i(\rho, \theta) &= \sqrt{\rho^2 + \rho_{ic}^2 + 2\rho\rho_{ic}\cos\Delta\theta + \alpha_i^2}, \Delta\theta = \theta - \theta_{ic} \\ \frac{\partial \phi_i(\rho, \theta)}{\partial \rho} &= \frac{\rho + \rho_{ic}\cos\Delta\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_{ic}^2 + 2\rho\rho_{ic}\cos\Delta\theta + \alpha_i^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_i(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \frac{-\rho \rho_{ic} \sin \Delta \theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_{ic}^2 + 2\rho \rho_{ic} \cos \Delta \theta + \alpha_i^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} = \frac{\rho_{ic}^2 \sin^2 \Delta \theta + \alpha_i^2}{[\rho^2 + \rho_{ic}^2 + 2\rho \rho_{ic} \cos \Delta \theta + \alpha_i^2]^{1.5}}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-\rho \rho_{ic} [\rho \rho_{ic} + \cos \Delta \theta (\rho^2 + \rho_{ic}^2 + \rho \rho_{ic} \cos \Delta \theta + \alpha_i^2)]}{[\rho^2 + \rho_{ic}^2 + 2\rho \rho_{ic} \cos \Delta \theta + \alpha_i^2]^{1.5}}$$

$$L\phi_i(\rho, \theta) = \frac{\rho^2 + \rho_{ic}^2 + 2\rho \rho_{ic} \cos \Delta \theta + 2\alpha_i^2}{[\rho^2 + \rho_{ic}^2 + 2\rho \rho_{ic} \cos \Delta \theta + \alpha_i^2]^{1.5}}$$

参考文献:

- [1] S J Xu, X Q Sheng. Coupling of edge element and mode matching for multistep dielectric discontinuity in guiding structures[J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1997, MTT 45(2): 284–287.
- [2] J F Lee, D K Sun, Z J Cendes. Full waves analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements[J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1991, MTT 39(8): 1262–1271.
- [3] M Swaminathan, E Arvas, T K Sarkar, A R Djordjevic. Computation of cut off wave number of TE and TM modes in waveguides of arbitrary cross sections using a surface integral formulation[J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1990, MTT 38(2): 154–159.
- [4] V Cingoski, N Miyamoto, H Yamashita. Element free Galerkin method for electromagnetic field computations[J]. IEEE Trans, Magn, 1998, 34(5): 3236–3239.
- [5] O Bottauscio, M Chiampi, A Manzini. Element free Galerkin method in eddy current problems with ferromagnetic media[J]. IEEE Trans, Magn, 2006, 42(5): 1577–1584.
- [6] F G Guimaraes, R R Saldanha, R C Mesquita, D A Lowther, J A Ramirez. A meshless method for electromagnetic field computation based on the multiquadric technique[J]. IEEE Trans, Magn 2007, 43(4): 1281–1284.
- [7] Yong Zhang, K R Shao, Yougang Guo, J D Lavers. A boundary meshless method for transient eddy current problems[J]. IEEE Trans Magn, 2005, 41(10): 4090–4092.
- [8] B L Ooi, G Zhao. Element free method for the analysis of arbitrarily shaped hollow conducting waveguides[J]. IEEE Proceedings Microwave Antennas Propagation, 2005, 152(1): 31–34.
- [9] M Sharan, E J Kansa, S Gupta. Application of the multiquadric method for numerical solution of elliptic partial differential equations[J]. Appl Math Comput 1997, 84(2/3): 275–302.
- [10] A H D Cheng, M A Golberg, E J Kansa, G Zammito. Exponential convergence and He multiquadric collocation method for partial differential equations[J]. Numer Methods Partial Equations, 2003, 19(5): 571–594.
- [11] R B Platte, T A Driscoll. Computing eigenmodes of elliptic operators using radial basis functions[J]. Computers and Mathematical with Applications, 2004, 48: 561–576.

作者简介:

张淮清 男, 1979 年出生于安徽霍山县, 重庆大学电气工程学院电工理论与新技术系博士研究生, 从事电磁场理论、电磁场数值计算、数字信号处理研究. E-mail: thunder_hq@yahoo.net

俞集辉 男, 1944 年出生, 重庆大学电气工程学院教授、博士生导师, 从事电磁场理论、电磁场数值计算和电磁兼容及应用方面的研究. E-mail: yujihui@cqu.edu.cn